MA2 – „písemná" přednáška 1. 4. 2020

1. Jako „rozcvička" ještě příklad „na" derivování složených funkcí (jednoduchý) – ukázka toho, že použití „řetízku" může být při derivování složené funkce i jednodušší výpočet, nebo aspoň ne složitější (jak to v minulé „přednášce" asi vypadalo)

$f(x,y) = x^y$ , $x(t) = \sin t$ , $y(t) = t^2$ (tj. vektorově $\vec{\varphi}(t) = (\sin t, t^2)$)

$\mathcal{D}f = \{ [x,y] \in R^2 ; x > 0 \} = (0,+\infty) \times R$

$\mathcal{D}\varphi = R$

a složenou funkci $g(t) = f(\vec{\varphi}(t)) = (\sin t)^{t^2}$ budeme „uvažovat" v $(0,\pi) \subset \mathcal{D}g$.

a derivace fce $g(t)$:

„přímo": $g'(t) = \left(e^{t^2 \ln(\sin t)}\right)' = e^{t^2 \ln(\sin t)} \left(2t \cdot \ln(\sin t) + t^2 \cdot \frac{\cos t}{\sin t}\right)$,

$t \in (0,\pi)$

a „řetízkem": $g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)) \cdot y'(t) =$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y x^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x$, $x'(t) = \cos t$, $y'(t) = 2t$,

tedy: $g'(t) = t^2 (\sin t)^{t^2-1} \cdot \cos t + (\sin t)^{t^2} \cdot \ln(\sin t) \cdot 2t$

(a docela jednoduché!)

2. Základní pojmy a „poznatky" z diferenciálního počtu vektorových funkcí více proměnných, tj. funkcí

$\vec{f}: M \subset R^n \longrightarrow R^m$, neboli

$\vec{f}(x_1,..,x_n) = (f_1(x_1,..,x_n), f_2(x_1,..,x_n), \dots, f_m(x_1,..,x_n))$

(stručněji: $\vec{f}(X) = (f_1(X), f_2(X),.., f_m(X)),\ X=(x_1,..,x_n)$)

Výsledky „zde" dostaneme „spojením" toho, co dosud víme o vektorových funkcích jedné proměnné (viz přednáška 18.3.) a o reálných funkcích více proměnných (přednášky další"). Uvážíme, že limita v $R^n$ se „přenáší" na složky, tak snad bude dále vše „jasné" – (nebudeme zbytečně složitě vše rozebírat) definice zůstávají „stejné":

1.) $\lim\limits_{X\to X_0\ (X_0\in M')} \vec{f}(X) = \vec{L},\ \vec{L}=(L_1,L_2,..L_m) \Longleftrightarrow \lim\limits_{X\to X_0} f_i(X) = L_i,\ i=1,2,..m$

tj. „$\lim\limits_{X\to X_0} \vec{f}(X) = (\lim\limits_{X\to X_0} f_1(X), \dots \lim\limits_{X\to X_0} f_m)$"

2.) a z 1) – spojitost v bodě $X_0\in M'$:

Funkce $\vec{f}$, definovaná v $U(X_0)$ je v bodě $X_0$ spojitá, když $\lim\limits_{X\to X_0} f(X)=f(X_0)$, což je ekvivalentní s tím, že funkce (reálné) $f_i(X)$ jsou spojité v $X_0$, $i=1,2,..,m$.

3. Parciální derivace funkce $\vec{f}$ v $X_0$ je definována (stejně)

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}(X_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{f}(X_0+\vec{h}) - f(X_0)}{h},\quad \vec{h}=(0,..0,\overset{i}{h},0,..,0)$$

$i=1,2,..n$.

tedy (z vlastností „limity" vektorové funkce – viz 1)) je

$$\underline{\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}(X_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(X_0), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(X_0), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(X_0)\right), \ i = 1, 2, \dots n}$$

4) <u>diferencovatelnost (a totální diferenciál)</u> funkce $\vec{f}(X)$ v bodě $X_0$:

<u>zkusme</u> (pokus – méně vědecký přístup, pro zájemce bude časem v příloze přístup „matematicky přesný")

(zatím vždy vyhovělo) –

<u>co kdyby (?)</u>

(*) $d\vec{f}(X_0) = (df_1(X_0), df_2(X_0), \dots, df_m(X_0))$ ?

co by měl (podle dřívějších „diferenciálů") takto definovaný $d\vec{f}(X_0)$ splňovat?

(i) $d\vec{f}(X_0)(dX)$ by mělo být lineární zobrazení z $R^n$ do $R^m$, tj. $d\vec{f}(X_0) = A \cdot dX$, $A$ – matice typu $(m, n)$ (viz LA)

(ii) $d\vec{f}(X_0)$ by měla být „lineární aproximace" funkce $\vec{f}$ v okolí bodu $X_0$, tj. mělo by platit:

$$\vec{f}(X) - \vec{f}(X_0) = d\vec{f}(X_0) \cdot (X - X_0) + \vec{\omega}(X - X_0), \text{ kde}$$

$$\lim_{X \to X_0} \frac{\vec{\omega}(X - X_0)}{\|X - X_0\|} = \vec{o}$$

Tak zkusme ověřit, zda (i) a (ii) při $d\vec{f}(X_0)$ v (*) platí:

(i) $d\vec{f}(X_0)$ je lineární zobrazení z $R_n$ do $R_m$:

$$d\vec{f}(X_0) = \begin{pmatrix} df_1(X_0) \\ df_2(X_0) \\ \cdots \\ df_m(X_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0)dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0)dx_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0)dx_n \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0)dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0)dx_2 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X_0)dx_n \\ \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(X_0)dx_1 + \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(X_0)dx_2 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(X_0)dx_n \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0), \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0), \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0), \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0), \dots, \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X_0) \\ \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(X_0), \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(X_0), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}}$$

tuto matici parciálních derivací nazýváme Jacobiho maticí funkce $\vec{f}$ v $X_0$ a značíme $J_{\vec{f}}(X_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,..m \\ j=1,..n}}$

vektor „přírůstků" $dx_i$ značíme $dX$

Pak lze napsat, že $d\vec{f}(X_0) = J_{\vec{f}}(X_0) \cdot dX$ – tedy je to (viz LA) lineární zobrazení

(ii) ? a jaká je „chyba" $\omega(X-X_0)$ v lineární aproximaci, tj.

$$\lim_{X \to X_0} \frac{\vec{\omega}(X-X_0)}{\|X-X_0\|} = 0 \quad ??$$

Předpokládali jsme v našem pokusu s $d\vec{f}(X_0)$ (viz (*)), že každá složka $f_i(X)$ je diferencovatelná v $X_0$, tj. že platí:

$$f_i(X) - f(X_0) = df(X_0)(X-X_0) + \omega_i(X-X_0), \text{ kde}$$

$$\lim_{X \to X_0} \frac{\omega_i(X-X_0)}{\|X-X_0\|} = 0, \quad i=1,2,\dots,m \qquad (**)$$

A nyní důkaz:

$$\lim_{X\to X_0} \frac{\vec{\omega}(X-X_0)}{\|X-X_0\|} = \lim_{X\to X_0} \frac{\vec{f}(X)-\vec{f}(X_0) - J_{\vec{f}}(X_0)\cdot(X-X_0)}{\|X-X_0\|} =$$

$$= \lim_{X\to X_0} \frac{1}{\|X-X_0\|} \begin{pmatrix} f_1(X)-f_1(X_0) - \nabla f_1(X_0)\cdot(X-X_0) \\ \dots \\ f_m(X)-f_m(X_0) - \nabla f_m(X_0)(X-X_0) \end{pmatrix} =$$

$$= \lim_{X\to X_0} \frac{1}{\|X-X_0\|} \begin{pmatrix} \omega_1(X-X_0) \\ \dots \\ \omega_m(X-X_0) \end{pmatrix} = \lim_{X\to X_0} \begin{pmatrix} \frac{\omega_1(X-X_0)}{\|X-X_0\|} \\ \dots \\ \frac{\omega_m(X-X_0)}{\|X-X_0\|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(„limitíme" po složkách, a platí (**) pro i. $i=1,2,.m$.

A to jsme chtěli! – „Důkaz" je hotov, $d\vec{f}(X_0)$ jsme „odhodli" správně!

A uvidíme ještě dále, jak Jacobiho matice $J_{\vec{f}}(X)$ je „užitečná" při derivování vektorových fcí složených!

5) <u>Derivace vektorové funkce ve směru</u> (vektoru $\vec{a}$, $\|\vec{a}\|=1$)

$\vec{f}$ nechť je diferencovatelná v bodě $X_0$; pak (ve zkrácené)

$$\frac{d\vec{f}}{d\vec{a}}(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{d\vec{a}}(X_0) \\ \cdots \\ \frac{df_m}{d\vec{a}}(X_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(X_0)\cdot\vec{a} \\ \cdots \\ \nabla f_m(X_0)\cdot\vec{a} \end{pmatrix} = J_{\vec{f}}(X_0)\cdot\vec{a},$$

$$\left(= \frac{d\vec{f}(X_0+t\vec{a})}{dt}\Big|_{t=0}\right)$$

neboť Jacobiho matici lze zapsat i „pomocí gradientů":

$$J_{\vec{f}}(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0), \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0), \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0) \\ \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(X_0), \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(X_0), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(X_0) \\ \cdots \\ \nabla f_m(X_0) \end{pmatrix}$$

6) <u>derivace složené vektorové funkce více proměnných</u>

(i) $\vec{\varphi}(t): \mathcal{J}=(a,b)\to R^n$, $\vec{\varphi}(t)\in M$ pro $t\in\mathcal{J}$, ex. $\vec{\varphi}'(t)$ v $\mathcal{J}$;
$\vec{f}(X): M\subset R^n \to R^m$, $\vec{f}$ je diferencovatelná v $X\in M$

Pak

$$\frac{d}{dt}\vec{f}(\vec{\varphi}(t)) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}f_1(\vec{\varphi}(t)) \\ \frac{d}{dt}f_2(\vec{\varphi}(t)) \\ \cdots \\ \frac{d}{dt}f_m(\vec{\varphi}(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\vec{\varphi}(t))\cdot\vec{\varphi}'(t) \\ \nabla f_2(\vec{\varphi}(t))\cdot\vec{\varphi}'(t) \\ \cdots \\ \nabla f_m(\vec{\varphi}(t))\cdot\vec{\varphi}'(t) \end{pmatrix}, \text{ tj.}$$

$$\underline{\frac{d}{dt}\vec{f}(\vec{\varphi}(t)) = J_{\vec{f}}(\vec{\varphi}(t))\cdot\vec{\varphi}'(t)}, \quad t\in\mathcal{J}$$

(opět – derivace složené fce = „derivace vnější · derivace vnitřní")

(ii) $\vec{\varphi}(X) : M_1 \subset R_n \to R_k$, $\vec{\varphi}(X) \in M_2$ pro $X \in M_1$, ex. $\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_i}(X)$ v $M_1$;

$\vec{f}(Y) : M_2 \subset R_k \to R_m$, $\vec{f}$ je diferencovatelná v bodech z $M_2$
(tj. body $M_2$ jsou vnitřní body)

Pak, označíme-li $\vec{g}(X) = \vec{f}(\vec{\varphi}(X))$, $X \in M_1$, existuje také

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial x_i}(X) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\vec{f}(\vec{\varphi}(X))\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} f_1(\vec{\varphi}(X)) \\ \text{--- ---} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} f_m(\vec{\varphi}(X)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\vec{\varphi}(X)) \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_i}(X) \\ \text{----} \\ \nabla f_m(\vec{\varphi}(X)) \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_i}(X) \end{pmatrix} =$$

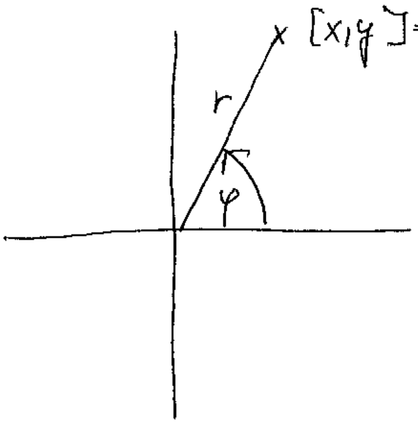
tedy,
$$\underline{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\vec{f}(\vec{\varphi}(X))\right) = J_{\vec{f}}(\vec{\varphi}(X)) \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_i}(X)}$$

(tedy opět „" – „derivace funkce vnější – $J_{\vec{f}}(\vec{\varphi}(X))$ ·
· derivace funkce vnitřní" – $\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_i}(X)$)

Jisté speciální „hezké" vektorové funkce $\vec{f} : M \subset R^n \to R^n$
(často se nazývají „vektorová pole")
Je-li Jacobiho matice $J_{\vec{f}}(X)$ matice regulární, i zobrazení $\vec{f}$ se nazývá regulární zobrazení. A dá se ukázat, že pokud $\vec{f}$ je zobrazení prosté množiny $U \subset R^n$ na $V \subset R^n$, pak existující inverzní zobrazení (inverzní vektorová funkce $\vec{f}^{(-1)}$) je je též zobrazení regulární.

A podívejme se teď pohledem „vektorových funkcí více proměnných" na transformaci souřadnic kartézských v $R^2$ na souřadnice polární" (příklad z minulé přednášky – užití derivace „složené funkce pro transformaci diferenciálního operátoru) –
– je to příklad vektorového zobrazení $R^2 \to R^2$:

$X \in R^2 \to (x, y)$ – kartézské souřadnice bodu $X$



$[x, y] = X$, pro $X \neq 0$, pak

lze $\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}$, $r \in (0, +\infty)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$,

tedy máme zobrazení

$$(r, \varphi) \xrightarrow{\vec{\Phi}} (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in R^2 \setminus \{[0,0]\}$$
$$\in (0, +\infty) \times \langle 0, 2\pi)$$

tedy lze napsat: $\underline{\vec{\Phi}(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)}$

$$\vec{\Phi} : (0, +\infty) \times \langle 0, 2\pi) \to R^2 \setminus \{[0,0]\}$$

a $$J_{\vec{\Phi}}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi, & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi, & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\det J_{\vec{\Phi}}(r, \varphi) = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r \neq 0$$

$J_{\vec{\Phi}}(r, \varphi)$ je tedy regulární v $(0, +\infty) \times \langle 0, 2\pi)$,

$\Phi$ je tedy regulární zobrazení.

V minulé přednášce jsme „transformovali" (jako cvičení na výpočet parciálních derivací složené funkce – tj. „řetízkové pravidlo) diferenciální „operátor": $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x}$,
kde $f = f(x, y)$.